ARBEITSGEMEINSCHAFT: VEKTOREN IM UNTERRICHT (ein Kurzbericht)

von

Univ.-Doz.Dr.H. Bürger und a.o.Univ.-Prof.Mag.Dr.H.C. Reichel

In dieser Arbeitsgemeinschaft sollten grundsätzliche Probleme bei der Behandlung von Vektoren im Mathematikunterricht in der Unter- und Oberstufe erörtert werden. Dabei sollten nicht Analysen oder Vorschläge der beiden Leiter im Vordergrund stehen (diesbezüglich siehe z.B. [BFMR], [RE_1], [RE_2], [SCHW], [BÜ] und die dort jeweils verzeichnete Literatur), vielmehr sollen bei möglichst breiter Beteiligung Probleme, Schwierigkeiten, Querverbindungen, Ideen, Ungereimtheiten, Vorteile und verschiedene Sichtweisen entdeckt und besprochen werden.

Zu diesem Zweck wurden bereits vorher in einer Aussendung an die angemeldeten Teilnehmer u.a. folgende Fragen vorgelegt: *)

- Welche Bedeutung haben Vektoren in der Mathematik und für andere Wissenschaften?
- Was ist ein Vektor? Wie sollen/können Vektoren in der Schule definiert werden? Verschiedene Sichtweisen und Anwendungen.
- Wo bieten sich im Unterricht in Mathematik und Physik Gelegenheiten, den Vektorbegriff <u>vorzubereiten</u>?
- Wann und wie sollen/können Vektoren <u>systematisch eingeführt</u> und <u>behandelt</u> werden? Welche Schwierigkeiten treten auf?

*) Auf Wunsch wurden vorher und nachher auch weitere Materialien zugeschickt. Die beiden Leiter der Arbeitsgemeinschaft standen zu vorher festgelegten Terminen unter anderem auch zur Literaturberatung zur Verfügung.

- Wo bieten sich im Unterricht in Mathematik und Physik Gelegenheiten, Vektoren anzuwenden. In welcher Form kommt der Vektorbegriff bei diesen Anwendungen zum Tragen?
- Was sollen Schüler am Ende der einzelnen Klassen von Vektoren wissen? Mit welchen Rechenoperationen sollen sie jeweils vertraut sein?
- Welche Vorteile und welche Nachteile bringt die vektorielle Behandlung der analytischen Geometrie?
- Was hat sich in den letzten Jahren in bezug auf das Thema der Arbeitsgemeinschaft geändert? Welche Absicht mag hinter diesen Änderungen gestanden sein? Vorteile - Nachteile?

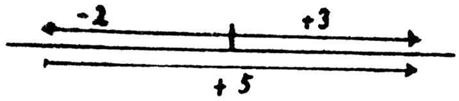
Zu all diesen Punkten erfolgte eine rege Diskussion; zur Fortsetzung der Arbeitsgemeinschaft über das Zeitlimit hinaus wurde sogar ein weiterer, ursprünglich nicht vorgesehener Termin vereinbart und am 14. Mai 1981 unter reger Beteiligung abgehalten. Damit standen also insgesamt 4 Stunden zur Verfügung. Das Ziel, "dort Querverbindungen und Probleme zu erkennen, wo man ohne weiteres Nachdenken vielleicht nur Zufälle und Ungereimtheiten sehen mag", wurde unseres Erachtens durchaus erreicht. Ebenso wurden viele konkrete Anregungen und Aspekte sowohl der Theorie wie vor allem der Unterrichtspraxis erörtert. In diesem Rahmen ist es natürlich nicht möglich, auf die Diskussionspunkte im einzelnen einzugehen.

Ein Schwerpunkt bei der Diskussion dieser Fragen war die Rolle der Vektoren im Unterricht der AHS und die Vorstellungen, die mit dem Begriff des Vektors im Unterricht verbunden wurden.

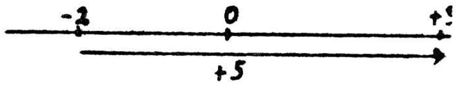
In den derzeit geltenden Lehrplänen scheint der Name Vektor bereits in der 2. Klasse der AHS (6. Schulstufe) auf: "Die Kongruenzabbildungen Geradenspiegelung, Schiebung (Vektor), Drehung - angewendet auf Punkt, Pfeil, Dreieck und Viereck". Bei der Behandlung dieses Themas im Unterricht steht allerdings das Konstruieren von Bildern einfacher Figuren im Vordergrund; der Beitrag zum Begriff des Vektors beschränkt sich zumeist auf die Feststellungen, daß eine Menge von gleich langen, parallelen, gleich orientierten Pfeilen ein "Vektor" heißt und daß eine Schiebung durch einen solchen Vektor festgelegt wird. (Im folgenden sollen derartige Äquivalenzklassen "Translationsvektoren" heißen.) Erst in der 3. Klasse kann die Zusammensetzung von Schiebungen in Zusammenhang mit der Addition von solchen Translationsvektoren gebracht werden. Doch bleibt diese Deutung als Vektoraddition ohne Auswirkung bzw. Anwendung, da sie zur konstruktiven Durchführung der Zusammensetzung von Schiebungen, die ja (lt. Lehrplan und Praxis) im Vordergrung des Unterrichts steht, nicht erforderlich ist.

In der 3. Klasse scheint der Name Vektor ein weiteres Mal im Lehrplan auf: "Die Menge der ganzen Zahlen: ... Graphische Darstellung (Punkte der Zahlengeraden, Vektoren) ... Die vier Grundrechnungsarten (Veranschaulichung der Addition und Subtraktion mit Hilfe von Vektoren)". In diesem Zusammenhang kann die Addition zweier ganzer Zahlen, etwa die Summe (-2) + (+5) = (+3) mit zwei Vorstellungen verbunden werden:

(1) Hängt man an einen (-2)-Pfeil einen (+5)-Pfeil an, so erhält man einen (+3)-Pfeil.



(2) Geht man vom Punkt (-2) um (+5) nach rechts, hängt also an dem Punkt (-2) einen (+5)-Pfeil an, so kommt man zum Punkt (+3).



(Siehe hiezu z.B. [BFMR], u.a.).

Weitere Vorstellungen zum Begriff des Vektors erhält der Schüler in der Unter- und in der Oberstufe im Physikunterricht. So werden etwa Kräfte durch Pfeile dargestellt, die nach der Parallelogrammregel addiert werden. Vektoren erscheinen hier als Pfeile mit festem Anfangspunkt und nicht als Pfeilklassen (also als Mengen gleich langer, paralleler, gleich orientierter Pfeile). Analoges gilt auch für die meisten anderen Anwendungen des Vektorbegriffes in der Physik (siehe z.B. [SCHW]).

Eine systematische Behandlung von Vektoren ist derzeit vom Lehrplan her erst in der 5. Klasse (9. Schulstufe) vorgesehen. (Die Frage, ob auch andere Schulstufen dafür in Frage kommen, wurde aus Zeitgründen nicht diskutiert.) Hauptanwendungsgebiet ist die analytische Geometrie: Vektoren sind in erster Linie Werkzeuge, um analytische Geometrie zu betreiben. Auch hier zeigt eine Analyse, daß die Anwendung des Vektorbegriffes im allgemeinen nicht mit der Vorstellung von Pfeilklassen verbunden ist.

Vielmehr werden Vektoren meist als Pfeile gesehen, deren Anfangspunkt gewissen Einschränkungen unterliegt. Beispielsweise wird der "Vektor $\vec{AB}$" durch einen Pfeil mit Anfangspunkt A und Endpunkt B dargestellt; "Ortsvektoren" sind Pfeile mit dem Ursprung des Koordinatensystems als Anfangspunkt; ein "Richtungsvektor" wird durch einen Pfeil dargestellt, dessen Anfangspunkt (irgendwo) auf einer Geraden liegt oder (etwa bei der Parameterdarstellung einer Geraden) in einem gegebenen Punkt der Geraden beginnt; der einem Normalvektor einer Ebene zugeordnete Pfeil hat seinen Anfangspunkt meist in der Ebene. ("Vektoraddition" bedeutet dabei jeweils etwas anderes.) Gelegentlich kann man Vektoren auch als Punkte deuten, etwa kann der in der Kreisgleichung $\mathfrak{x}^2 = r^2$ auftretende Vektor $\mathfrak{x}$ einen Punkt des Kreises zugeordnet werden. In der analytischen Geometrie werden außerdem auch Zahlenpaare und Zahlentripel als Vektoren angesehen (was sich auch in der durchaus üblichen Schreibweise "$\mathfrak{a} = \binom{2}{3}$" äußert). Sie vorallem sind die eigentlichen Rechenobjekte, mit denen die für Vektoren üblichen Rechenoperationen (Addition, Multiplikation mit einer reellen Zahl, skalare Multiplikation, usw.) durchgeführt werden. Im übrigen erscheinen Vektoren auch in Anwendungssituationen vielfach als n-Tupel, man denke nur an das Arbeiten mit Vektoren in der theoretischen Physik, bei Aufgaben der linearen Optimierung u.v.a.m.

Überlegungen, wie sie hier angedeutet wurden, können als Grundlage für eine Entscheidung über das <u>Problem der Definition des Vektorbegriffes in der Schule</u> dienen. Dieses Problem war ein weiterer Schwerpunkt in den Diskussionen der Arbeitsgemeinschaft.

Vektoren werden heute in der Mathematik vielfach axiomatisch (also implizit, formal) definiert, d.h. als Objekte, die die durch die Axiome eines Vektorraumes festgelegten Eigenschaften besitzen. Bei den verschiedensten Anwendungen kommen dann jeweils verschiedene (wenn auch bei gleicher (endlicher) Dimension isomorphe) Konkretisierungen zum Tragen, d.h. sogenannte Vektorraummodelle. Im MU wohl vor allem: Ortsvektoren der Ebene oder des Raumes, Translationsvektoren (= Pfeilklassen), Zahlenpaare bzw. -tupel (d.h. "Zeilenvektoren" bzw. "Spaltenvektoren" des R^2 und R^3, u.v. auch n-tupel für $n > 3$).

Jedes dieser Vektorraummodelle kann - mit den entsprechenden Verknüpfungen - im MU zur expliziten, inhaltlich konkreten Definition des Begriffes "Vektor" herangezogen wurden. Tatsächlich ist man im MU der AHS ja gezwungen den Vektorbegriff von einem konkreten Modell her aufzubauen und nicht etwa wie im wissenschaftlichen Lehrbetrieb von der formal axiomatischen Definition auszugehen. Daraus ergibt sich (1.) das Problem, den Vektorbegriff beim Schüler nicht auf dieses als Einstieg gewählte Modell zu fixieren, und (2.) gründen dann die verschiedenen und oft sehr gegensätzlichen Unterrichtsvorschläge. (Eine ähnliche Problematik liegt ja auch beim Wahrscheinlichkeitsbegriff u.a. vor. Vgl. hiezu die Ausführungen in [RE_1] und [RE_3]). Für die Schule scheidet eine axiomatische Definition des Vektorbegriffes aus einsichtigen, aber hier nicht weiter erörterten Gründen aus.

Zusammenfassend bieten sich zur Definition von Vektoren im Unterricht u.a. folgende Möglichkeiten an:

(1) Vektoren werden als Pfeilklassen definiert (wie dies etwa im "Lehrbuch der Mathematik" von J. Laub geschieht). Dadurch wird es möglich, Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen geometrisch zu definieren und nachzuweisen, daß die Axiome eines Vektorraumes erfüllt sind, natürlich ohne dies so auszudrücken! (Eine Definition der Addition von "Pfeilen" in der üblichen Weise ist nur möglich, wenn diese Pfeile gleichen Anfangspunkt haben, Pfeile mit verschiedenen Anfangspunkten können auf diese Weise nicht addiert werden. Deshalb sieht man gleich lange, parallele, gleichorientierte Pfeile als "gleich" an und faßt sie in einer Pfeilklasse zusammen.) Ein Nachteil einer solchen Vektordefinition ist der, daß - wie bereits ausgeführt - sowohl in der analytischen Geometrie als auch in außermathematischen Anwendungen die Pfeilklassenvorstellung zu den auftretenden Problemen meist nicht adäquat ist. Außerdem muß aus "strukturellen" Gründen mit Äquivalenzklassen von Pfeilen und Repräsentanten dieser Klassen gerechnet werden, was eine Erschwernis mit sich bringen kann, die dem Vektorbegriff an sich und mit dem Rechnen mit Vektoren eigentlich nichts zu tun hat. Sie ist, kurz gesagt, ja nur "modellbedingt". (Bzgl. einer genaueren didaktischen Analyse dieses Aspektes siehe z.B. [BFMR] oder [RE_1].)

(2) Vektoren werden als Zahlenpaare (bzw. Zahlentripel) definiert und diese werden - je nach Problemlage - als Pfeile oder als Punkte der Ebene (bzw. des Raumes) geometrisch dargestellt.

Auch die Rechenoperationen werden arithmetisch definiert und geometrisch gedeutet. (Dies wird im Arbeitsbuch "Mathematik - Oberstufe" von H. Bürger, R. Fischer, G. Malle durchgeführt. - Genaueres siehe z.B. [BFMR]. Diese Vorgangsweise kann als eine Verallgemeinerung des Arbeitens mit reellen Zahlen angesehen werden; der zweifachen geometrischen Deutung der Zahlenpaare als Pfeile und Punkte der Ebene entspricht die zweifache Deutung der reellen Zahlen als Pfeile oder Punkte auf der Zahlengeraden. Auf diese Weise wird eine flexible Handhabung des Vektorbegriffes ermöglicht, die der Arbeitsweise der analytischen Geometrie entgegenkommt: geometrische Sachverhalte werden arithmetisch erfaßt, Ergebnisse entsprechender Rechnungen werden geometrisch gedeutet.

(3) Der Begriff des Vektors wird (vorerst) nicht als solcher festgelegt, wohl aber werden bestimmte Modelle eines Vektorraumes mit den entsprechenden Rechenoperationen behandelt und (-als spezielle Arten von Vektoren-) definiert, etwa: Ortspfeile ("Ortsvektoren"), Pfeilklassen ("Translationsvektoren"), Zahlenpaare ("Zahlenvektoren"). Es wird niemals von "Vektoren" schlechthin gesprochen, sondern z.B. von Ortsvektoren, Translationsvektoren, Zahlen- (Spalten-, Zeilen)-vektoren. Der Begriff "Vektor" wird allenfalls als kurze "façon de parler" verwendet, allenfalls erst in der 8. Klasse (12. Schulstufe) im Zusammenhang mit der axiomatischen Behandlung des Begriffes "Vektorraum". Dadurch wird der Begriff "Vektor" - im Gegensatz zu (1) und (2) - nicht an ein spezielles Modell geknüpft, sondern es wird zwischen verschiedenen Arten von Vektoren unterschieden. Die Gleichartigkeit dieser Modelle kann dann - wie gesagt - allenfalls auch zu einer

späteren Definition des Begriffes "Vektorraum" führen. (Siehe den Vorschlag in [RE_1]).

(4) Mit Vektoren wird in der Darstellung als Pfeile und als Zahlenpaare (Zahlentripel) - so wie mit Zahlen - als <u>undefinierter</u> Begriff gearbeitet, auf eine explizite Definition des Begriffes "Vektor" wird also überhaupt verzichtet.

Unabhängig davon, welche Entscheidung über die Definition von Vektoren im Unterricht getroffen wird, ist festzustellen, daß der Begriff des Vektors - so wie jeder Begriff - durch eine <u>Definition allein</u> nicht geprägt wird, sondern daß mit dem "wirklichen" Verständnis jedes Begriffes auch seine anschaulichen Vorstellungen und Anwendungen wesentlich verknüpft sind. Im Unterricht erscheint daher <u>ein möglichst vielseitiges Bild des Vektorbegriffes</u> wünschenswert.

- Ein weiterer Schwerpunkt in den Diskussionen der Arbeitsgemeinschaft war das Problem der <u>Bedeutung der Vektoren für die analytische Geometrie</u> im Zusammenhang mit den <u>Zielen des Unterrichts in der analytischen Geometrie</u>.

Ein solches Ziel ist die Beschreibung von geometrischen Objekten und Beziehungen zwischen diesen Objekten mit arithmetischen Mitteln. Es ist anzunehmen, daß für diese Beschreibung die Verwendung von Pfeilen und deren Erfassung durch Zahlenpaare (Zahlentripel) hilfreich ist (man denke dazu an die Parameterdarstellung einer Geraden oder die geometrische Deutbarkeit einer Gleichung einer Geraden mit Hilfe des Normalvektors). Allerdings wirkt dieser Zielsetzung entgegen, wenn für die meisten Aufgaben, die in der analytischen Geometrie gestellt werden, Formeln bzw. Rezepte zur Lösung bereitgestellt werden, so daß die Übersetzungsleistung auf die bloße Auswahl einer Formel reduziert wird. Eine solche Gestaltung des Unterrichts in der analytischen Geometrie wirkt auch zwei anderen Zielsetzungen dieses Unterrichts entgegen, nämlich der Erziehung zum produktiven Denken und der Ausbildung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Möglichkeiten zum produktiven Denken bietet die analytische Geometrie in reichem Maße, weil hier wenige Kenntnisse und Fertigkeiten (sofern nicht zu viele Formeln und Rezepte vorgegeben werden) in vielfältiger Weise zur Lösung verschiedenartiger Probleme kombiniert werden können. Bezüglich der Ausbildung des räumlichen Vorstellungsvermögens bringt die Verwendung von Vektoren in der analytischen Geometrie u.a. den großen Vorteil, daß die Kenntnisse und Fertigkeiten, die zum Betreiben der analytischen Geometrie der Ebene erforderlich sind, im wesentlichen auch für die analytische Geometrie des Raumes zum Tragen kommen können/sollen.

Weitere Aspekte des Vektorbegriffes, die im Bezug auf die Unterrichtspraxis mehr oder weniger eingehend diskutiert wurden, waren die Einführung der negativen Zahlen (3. Klasse) und die Verwendung von Vektoren bei der Behandlung der komplexen Zahlen in der Oberstufe.

Für nähere Auskünfte in bezug auf die Arbeitsgemeinschaft bzw. Literatur etc. stehen die Autoren dieses Kurzberichtes jederzeit zur Verfügung.

LITERATUR

[BFMR] Bürger H., Fischer R., Malle G. und Reichel H.C.: Zur Einführung des Vektorbegriffes: arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung; Journal f. Mathematik-Didaktik 1 (1980) 171-187.

[BÜ] Bürger H.: Vektorielle Behandlung der Kegelschnitte Wiss. Nachr. 27 (1971) 21-27.

[RE_1] Reichel H.C.: Vektorbegriff und axiomatische Fragen im Rahmen der Linearen Algebra in der gymnasialen Oberstufe.
In: Beiträge zum Mathematikunterricht.
Hannover: Schroedel 1978.

[RE_2] Reichel H.C.: Zum Skalarprodukt im Unterricht an der Sekundarstufe, eine didaktische Analyse; Didaktik d. Math. 8 (1980), 102-132.

[RE_3] Reichel H.C.: Sprachprobleme im Mathematikunterricht; Vortrag bei der Jahrestagung der DMV, Dortmund 1981 (ersch. 1982).

[SCH] Schweiger F.: Vektoren für die Physik.
In: Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe II (Hrsg. W. Dörfler und R. Fischer). Klagenfurt 1976, 187-200.

a.o.Univ.-Prof.Mag.Dr.H.C. Reichel
Institut für Mathematik
der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 W i e n

Univ.-Doz.Prof.Dr.H. Bürger
Institut für Mathematik
der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 W i e n